Exercice E11 - Repliement de spectre

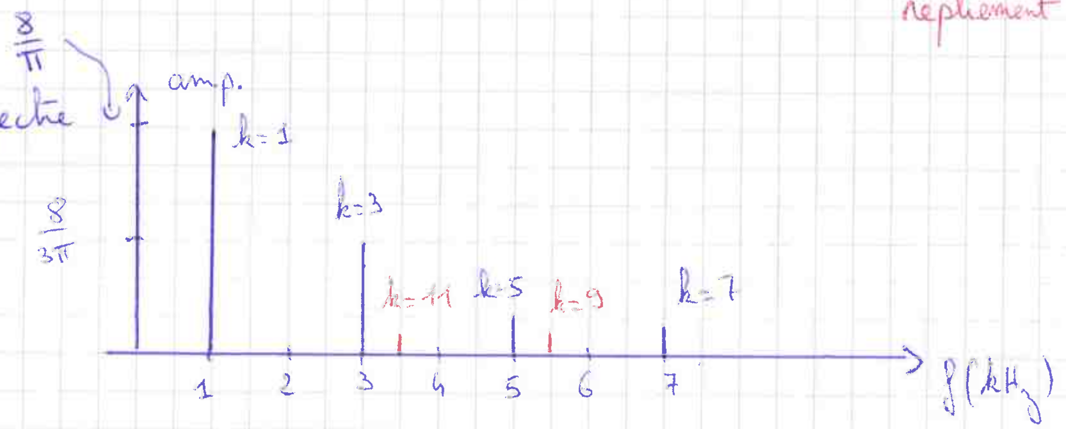
1. La condition de Nyquist-Shannon $f_{ech} > 2 f_{max}$
Donc $f_{max} < 7{,}25$ kHz.
Avec une fondamentale à 1 kHz, la condition est respectée jusqu'à $f_7 = 7$ kHz (soit $n = 3$) c'est-à-dire harmonique 7

2. Posons $k = 2n + 1$

N° k de l'harmonique	1	3	5	7	9	11
fréquence (kHz)	1	3	5	7	5,5	3,5

repliement $f_k' = f_{ech} - f_k$

3. Spectre (pas à l'échelle)



4. Cherchons $\frac{4A}{\pi(2n+1)} > \frac{5}{100} A$ soit $2n+1 < \frac{400}{5\pi} \simeq 25{,}5$

Donc l'harmonique $k = 25$. Avec Nyquist-Shannon $f_{ech} > 50$ kHz

Exercice E12 - Detection synchrone pour radar automobile

1. Il s'agit d'une A.N. $\Delta f = 2vf/c \simeq 1{,}4.10^2$ Hz.

2. La fréquence max du signal $f_{max} = f + \Delta f$. Avec Shannon,
$f_{ech} > 2 f_{max} = 2(f + \Delta f)$.

La résolution spectrale $\delta f = \frac{f_{ech}}{N}$ d'où $N > \frac{2(f+\Delta f)}{\delta f}$

Au minimum, il faut une résolution $\delta f = \frac{\Delta f}{10} = 14\ Hz$. On a alors

$$\boxed{N > 7{,}1 . 10^7}$$

Il s'agit d'un nombre trop important de points pour être traité rapidement.

3. Détection synchrone : → signal de référence de fréquence f

→ signal reçu avec léger décalage $f' = f \pm \Delta f$

" cela diminue la fréquence du signal " ← → on les multiplie puis filtre passe bas pour récupérer le signal de fréquence Δf.

4. Notons $s_{ref} = s_0 \cos(2\pi f t)$ et $s_{rec} = s_0' \cos[2\pi(f+\Delta f)t + \varphi)$

Le signal reçu possède un déphasage φ

En sortie du multiplieur, $s_m = k s_0 s_0' \cos(2\pi f t)\cos(2\pi(f+\Delta f)t+\varphi)$

donc $s_m = \frac{k s_0 s_0'}{2}\left[\cos(2\pi \Delta f t + \varphi) + \cos(2\pi(2f+\Delta f)t + \varphi)\right]$

Soit 2 composantes avec l'amplitude $\frac{k s_0 s_0'}{2}$, la première de fréquence Δf et l'autre $2f + \Delta f$.

5. On utilise un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure f_c supérieure (légèrement) à Δf. On peut prendre 200 Hz, par exemple

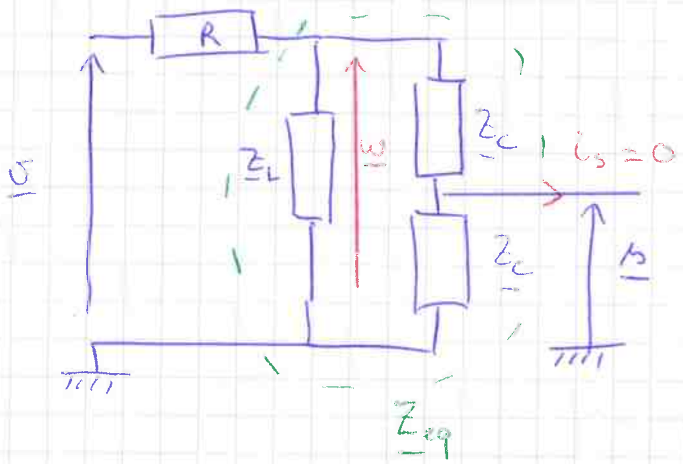
6. De nouveau $N > \frac{2\Delta f}{\delta f} = \frac{2 \times 1{,}4 . 10^2}{14} = \underline{20}$

Avec ce nombre de points, il est plus facile de traiter le signal rapidement.

7. Avec le filtre passe-bas, une large gamme de fréquence ne passe pas. Ainsi, les hautes fréquences du bruit sont supprimées et le signal ressort plus facilement dans le bruit (basses fréquences) restant.

Exercice E13 - Oscillateur de Colpitts

1. Représentons la partie du circuit avec les impédances :



Pont diviseur de tension

$$\frac{\underline{s}}{\underline{w}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_C}} = \frac{1}{2}$$

De même,

$$\underline{w} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R + \underline{Z_{eq}}}\underline{v} = \frac{1}{1 + R/\underline{Z_{eq}}}\underline{v}$$

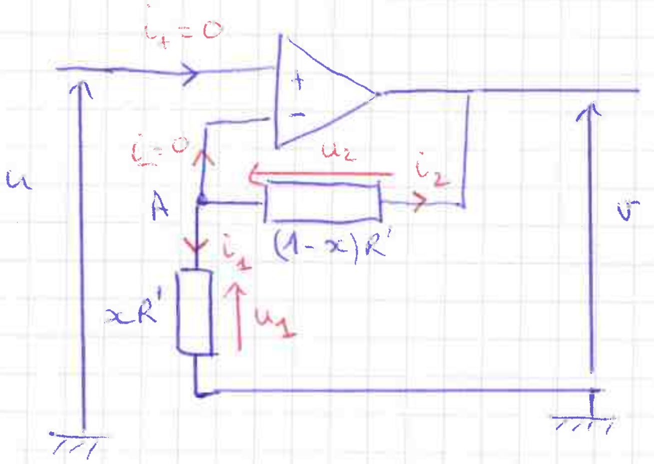
$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{2\underline{Z_C}} = \frac{jC\omega}{2} + \frac{1}{jL\omega}$$

D'où $$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{u}} = \frac{1/2}{1 + j\frac{RC\omega}{2} + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{1/2}{1 + j\frac{RC\omega}{2} - j\frac{R}{L\omega}}$$

Par identification,
$$\begin{cases} Q\omega_0 = R/L \\ Q/\omega_0 = \frac{RC}{2} \\ H_0 = 1/2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{H_0 = 1/2\ ;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}}$$

2. Représentons le circuit en détaillant

+ Contre réact ⊖ donc supposé linéaire



L'idéal est idéal $\underline{V_+} = \underline{u} = \underline{V_-}$

Donc, au point A, $\underline{V_A} = \underline{u}$

Loi des nœuds en terme de potentiel en A

$$i_- = 0 = i_1 + i_2 = \frac{\underline{u} - 0}{xR'} + \frac{\underline{u} - \underline{v}}{(1-x)R'} = 0$$

Donc $\frac{\underline{u}}{x} + \frac{\underline{u}}{1-x} = \frac{\underline{v}}{1-x}$ d'où $\underline{A} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{1}{x}$

3. La condition d'oscillation à la pulsation ω_{osc} :

$$\underline{A}(\omega_{osc}) \times \underline{F}(\omega_{osc}) = 1$$

ou encore $\frac{1}{2x} \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega_{osc}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{osc}}\right)} = 1$

4. Pour respecter l'égalité précédente $Q\left(\frac{\omega_{osc}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{osc}}\right) = 0$

(énoncé)

donc $\omega_{osc} = \Omega = \omega_0$ et $\frac{1}{2x_0} = 1$ d'où $x_0 = 1/2$

Avec L et C, $\Omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$

5. Revenons à la condition sachant que $\omega_{osc} = \omega_0$:

$\underline{A}(\omega_0)\underline{F}(\omega_0) = 1$ devient $\frac{1}{2x} = 1$

Pour un démarrage, le produit doit en norme être légèrement supérieur à 1 d'où $|\underline{A}(\omega_0)| \times |\underline{F}(\omega_0)| \gtrsim 1$ soit $\frac{1}{2x} \gtrsim 1$ et donc

$x \lesssim 1/2 = x_0$

6. L'amplitude des oscillations de s est limitée par les non linéarités dans le circuit. Un phénomène pouvant intervenir ici est la saturat° de l'ALI.

Exercice E14 - Oscillateur à résistance négative

1. Loi des noeuds en terme de potentiel à la borne (+)

$$\frac{V_S - V_+}{R} + \frac{0 - V_+}{R'} = i_+ = 0$$

La résistance de la contre-réaction négative : $\frac{V_S - V_-}{R} = i$

Or, $V_+ = V_- = v$

Donc $\frac{V_s - v}{R} - \frac{v}{R'} = 0$ d'où $\underline{v = R'i}$

$V_s - v \to Ri$

L'ALI avec les 3 resistors peut se modéliser par un seul résistor de tension $v = R'i$. Cependant, il est orienté avec la convention générateur ! En convention récepteur $v' = -v = -R'i$ donc cela se passe comme s'il y avait un resistor de résistance négative $\underline{-R'}$.

2. Par la loi des mailles $u_c + L\frac{di}{dt} + (r - R')i = 0$

Or, $i = C\frac{du_c}{dt}$ d'où $u_c + LC\ddot{u}_c + (r - R')C\dot{u}_c = 0$

$\Rightarrow \ddot{u}_c + \frac{r - R'}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $Q = \frac{1}{r - R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$

3. On obtient des solutions qui divergent lorsque $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r - R'}{L} < 0$

donc $\underline{R' > r = R'_{min}}$

4. Régime d'amplification : $0 \leq t < 7.5\,ms$
Régime d'oscillations auto-entretenues : $t > 7,5\,ms$

5. Régime limité par la saturation de l'ALI (seul dipôle non linéaire)

6. Le discriminant de l'équation ~~diff~~ caractéristique $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$

Les racines $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \mu \pm j\,\Omega$

Les solutions peuvent se mettre sous la forme $\underline{u_c(t) = u_{c0}\,e^{\mu t}\cos(\Omega t + \varphi)}$

7. Sachant que $\cos(\Omega t + \varphi)$ est T-periodique, il vient

$$\frac{u_c(t)}{u_c(t+mT)} = \frac{e^{\mu t}\cos(\Omega t + \varphi)}{e^{\mu(t+mT)}\cos(\Omega(t+mT) + \varphi)} = e^{-\mu m T}$$

Donc $\ln\left(\dfrac{u_c(t)}{u_c(t+nT)}\right) = -\mu n T = \dfrac{\omega_0}{2Q} n T$ Avec $Q^2 \gg 1$

$T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Finalement, $\dfrac{\omega_0}{2Q} n T = \dfrac{n\pi}{Q} \longrightarrow Q = \dfrac{n\pi}{\ln\left(\dfrac{u_c(t)}{u_c(t+nT)}\right)}$

demi-graduat° / $\sqrt{3}$

---

8. Sur le graphique, à $t = 4$ ms, $u_c(t) = 0{,}50 \pm 0{,}18$ V

à $t = 6{,}7$ ms, $u_c(t) = 8{,}00 \pm 0{,}18$ V

$n = 6$ entre les 2

Le calcul de l'incertitude est "compliqué" et une méthode MC est plus pratique pour déterminer $u(Q)$.

Voir script $\longrightarrow$ on trouve $Q = -6{,}78 \pm 0{,}52$

9. À partir de l'expression de Q, $r = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}} + R'$

Avec le script $\longrightarrow$ $r = 95{,}5 \pm 5{,}2\ \Omega$

La valeur donnée dans l'énoncé, $r_{ohm} = 50{,}0 \pm 0{,}5\ \Omega$

Calculons l'écart normalisé $E_N = \dfrac{|r_{ohm} - r|}{\sqrt{u(r_{ohm})^2 + u(r)^2}} = 8{,}7 > 2$

incompatible

En réalité, la résistance interne d'une bobine dépend de la fréquence et elle augmente à cause de l'effet de peau si la fréquence augmente.

Un ohmmètre : mesure avec $f = 0$ (c'est du continu)

Ici, $f \sim$ kHz.

10. Des oscillations harmoniques pour $R' = r = R'_{min}$

La fréquence des oscillations $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 2250$ Hz

11. L'harmonique du rang 5 possède la fréquence $5 f_0$.

D'après le critère de Nyquist - Shannon $\underline{f_{ech} > 10 f_0 = 22,5 \ kHz}$

12. On a mesuré $r_{mes} = 95,5 \pm 5,2 \ \Omega$ et l'oscillation quasi-sinusoïdale est observée pour R' légèrement ~~s~~supérieure à r mais proche de $R' = 101 \ \Omega$.

Sur le spectre associé, $f_{0,mes} = 2,25 \pm 0,14 \ kHz$ ~ graduat°/$\sqrt{2}$ par choix

Les 2 valeurs obtenues sont compatibles 2,25 kHz pour les deux.

13. Lorsque R' devient très grand devant r, de nouvelles composantes dans le spectre apparaissent. Le signal quant à lui devient écrêté.

T1