Correction

TD T2 - Diffusion de particules

Exercice T21 – Oxygénation du sang [♦◇◇]

Sujet de concours : *d'après écrit Mines-Ponts*

Les organes ont un besoin régulier en oxygène. C'est le sang qui transporte l'oxygène des poumons vers les différents organes. Le sang se charge en oxygène par diffusion du gaz contenu dans les alvéoles du poumon vers le capillaire sanguin périphérique de l'alvéole. Les alvéoles sont supposées sphériques (voir figure 1), de rayon $R_{al} = 10^{-4}$ m. Le sang circule dans le capillaire de rayon $r = 10^{-5}$ m à la vitesse moyenne $v = 10^{-3}$ m.s^{-1}. Les coefficients de diffusion de l'oxygène dans l'air et l'eau sont respectivement $D_{air} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ m^2.s^{-1} et $D_{eau} = 10^{-9}$ m^2.s^{-1}.

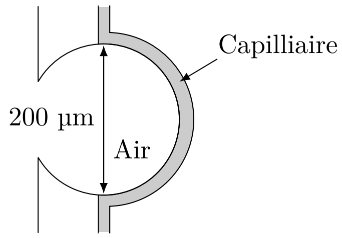

Fig. 1 – Oxygénation d'un capillaire sanguin autour d'une alvéole pulmonaire

1. Calculer le temps de contact δt_s du sang avec l'alvéole.
2. Estimer le temps de diffusion d'une molécule d'oxygène, en convenant que c'est la somme du temps de diffusion dans l'air (alvéole) et du temps de diffusion en milieu aqueux (capillaire). Montrer que l'échange d'air entre l'alvéole et le sang a le temps de s'établir.

Exercice T22 – Diffusion au travers de la paroi d'un tuyau d'arrosage [♦♦◇]

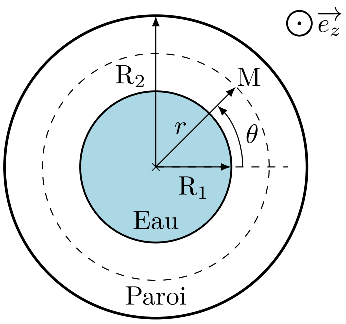

Fig. 2 – Représentation d'une section transverse du tuyau. La zone bleue intérieure représente l'eau en écoulement.

On considère un tuyau d'arrosage de longueur L supposée infinie dans la direction (Oz), utilisé pour irriguer un jardin. L'eau contenue dans le tuyau diffuse avec un coefficient noté D au travers de la paroi poreuse du tuyau vers l'extérieur où elle ressort sous forme de gouttelettes. On note R_1 le rayon intérieur de la paroi et R_2 son rayon extérieur. On suppose que l'eau qui s'échappe de la paroi est rapidement absorbée par l'extérieur, on peut donc considérer que la densité particulaire au niveau de la surface externe du tuyau est nulle. De plus, l'écoulement dans le tuyau étant permanent, la densité particulaire au niveau de la surface interne du tuyau est constante et égale à n_0. Le régime de diffusion est supposé stationnaire. En coordonnées cylindriques, un point M est décrit par M(r,θ,z). Les symétries du problème nous poussent à chercher une densité particulaire en régime stationnaire sous la forme $n(r)$ et un vecteur densité de flux de particules s'écrit $\vec{j}_N = j(r)\vec{e_r}$.

1. En réalisant un bilan de particules pour un volume bien choisi, montrer que $j(r) = A/r$ avec A une constante.
2. En déduire l'expression de $n(r)$ en tous points de la paroi en fonction de r, n_0, R_1 et R_2.
3. Déterminer le flux de particules d'eau s'échappant au travers de la paroi du tuyau en fonction de D, n_0, R_1, R_2 et L.

Exercice T23 – Décantation des boues résiduelles [♦♦♦]

Sujet de concours : *d'après écrit Centrale-Supélec PC*

On s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein d'un décanteur, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques de rayon $r \leq 1$ µm et de densité d. La masse volumique de la bille est notée ρ_s et celle de l'eau ρ_e, avec $d = \dfrac{\rho_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{e}} > 1$.

On note $n^*(z,t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules m^{-3}. On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $\mathrm{H} = 2$ m et de section S. Le fond du bac est à la cote $z = 0$.

La particule chute dans le bac. Elle atteint très rapidement une vitesse limite $\vec{v_\ell} = v_\ell \vec{e_z}$ de telle sorte que le mouvement des particules puisse être considéré rectiligne et uniforme.

1. On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules $\vec{\jmath}_\mathrm{D}$, proportionnel et opposé au gradient de centration, soit ici $\vec{\jmath}_\mathrm{D} = -\mathrm{D}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

- **a)** Exprimer $\vec{\jmath}_\mathrm{D}$ en fonction de D, $\dfrac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.
- **b)** En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse v_ℓ.
  Déterminer l'expression du flux de particules $\vec{\jmath}_\mathrm{C}$ associé à la convection, en fonction de $n^*(z,t)$ et $\vec{v_\ell}$. En déduire le flux total de particules $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}_\mathrm{D} + \vec{\jmath}_\mathrm{C}$.
- **c)** Montrer soigneusement que l'évolution de $n^*(z,t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver qui s'écrit

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

2. On cherche le profil de concentration $n^*_\infty(z)$ en régime stationnaire.

- **a)** Donner la forme de la solution générale pour $n^*_\infty(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ.
- **b)** Comment s'écrit la condition limite pour le flux total $\vec{\jmath}$ en $z = 0$? En déduire l'expression de $n^*_\infty(z)$ en fonction de $n^*_0 = n^*_\infty(z = 0)$, λ et z.
- **c)** On admet que λ est de la forme

$$\lambda = \frac{h}{r^3} \qquad \text{avec} \qquad h = 1{,}6 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{m}^4$$

  Estimer numériquement λ pour $r = 1$ µm, $r = 0{,}1$ µm et $r = 0{,}01$ µm. Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

3. On néglige les effets diffusifs. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation v_ℓ décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki, d'équation

$$v_\ell(x) = v_0(1-x)^n$$

où x est la fraction volumique en particules solides dans la boue, v_0 une constante et $n \simeq 5{,}1$.

- **a)** Relier $x(z,t)$ à la densité volumique en particules solides $n^*(z,t)$ et au volume $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe $v_\ell = f(n^*)$.
- **b)** Que représente la constante v_0 ? Quelle est la conséquence pour le mouvement macroscopique de l'eau de la chute d'un grand nombre de sédiments ? Expliquer alors qualitativement pourquoi v_ℓ décroît lorsque la concentration en particules augmente.

4. On note le flux de particules $\vec{\jmath}$ (qui s'assimile au flux convectif $\vec{\jmath}_\mathrm{C}$ déterminé précédemment). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note $\vec{\jmath} = -j(z,t)\vec{e_z}$.

Déterminer $j(z,t)$ en fonction de v_0, V, n et $n^*(z,t)$.

En vous aidant de la courbe ci-dessous (figure 3), déterminer la valeur maximale j_max du flux de particules, en fonction de v_0 et V.

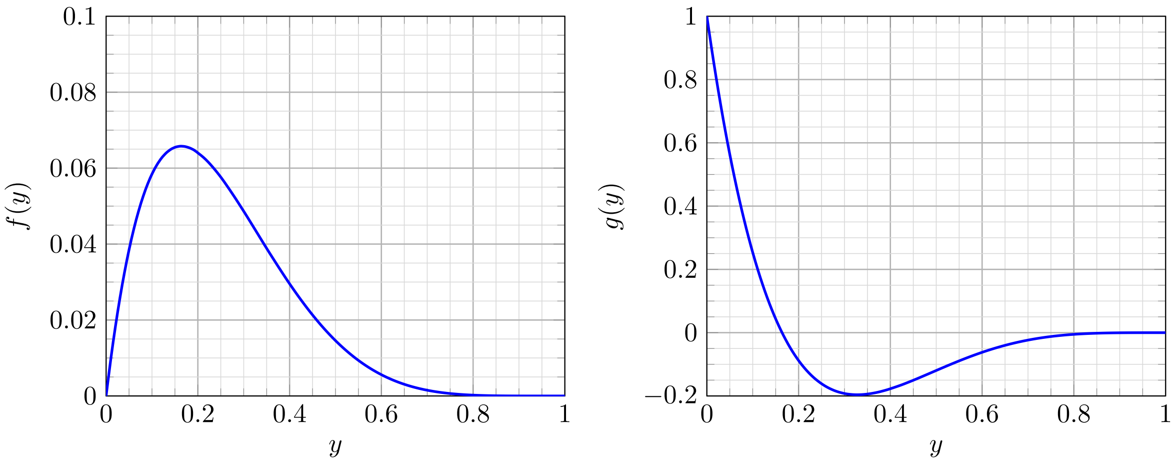

Fig. 3 – À gauche, graphe de la fonction $f(y) = y(1-y)^{5,1}$ et à droite, graphe de la fonction $g(y) = f'(y)$.

5. Une suspension initialement homogène de densité volumique n_0^* laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare.

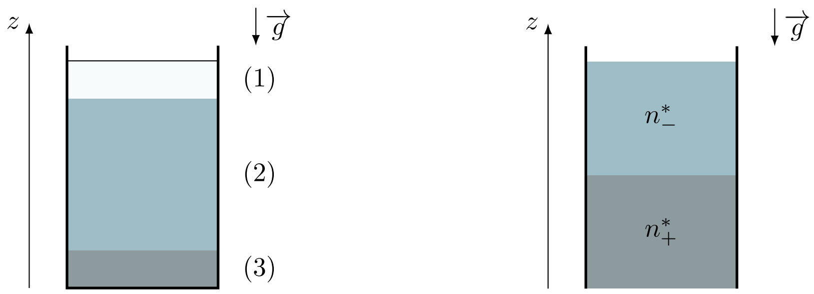

Fig. 4 – À gauche, les trois zones pendant la décantation et à droite, un zoom sur une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules différentes.

a) En vous aidant de la figure 4 ci-dessus, déterminer la valeur de n^* dans chacune de ces trois zones.

b) Par un bilan de particules entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, montrer que la vitesse de déplacement $\overrightarrow{v_\mathrm{F}}$ d'une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules respectives n_-^* et n_+^* s'écrit

$$\overrightarrow{v_\mathrm{F}} = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*}\,\overrightarrow{e_z}$$

c) La frontière entre (1) et (2) se déplace à une vitesse $\vec{v}_{12}$. Déterminer $\vec{v}_{12}$ pour une fraction volumique $x = 10\%$ en sédiments, en fonction de v_0.

d) La frontière entre (2) et (3) se déplace à une vitesse $\vec{v}_{23}$. Déterminer $\vec{v}_{23}$ en fonction de v_0.

6. On cherche à comprendre pourquoi de tels fronts de variation brusque de la concentration apparaissent quel que soit le profil initial de la concentration dans le décanteur.

a) On note $\vec{v}_\mathrm{iso} = v_\mathrm{iso}\,\overrightarrow{e_z}$ la vitesse de déplacement d'une surface horizontale de densité volumique n^* fixée.

Relier v_iso à $\dfrac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}n^*}$, puis tracer l'allure de $v_\mathrm{iso}(n^*)$.

b) En déduire comment, à partir d'une suspension où la fraction volumique varie linéairement de 0 en surface à 0,80 au fond du décanteur, un front où la concentration varie brutalement peut se former dans le décanteur.

Pour approfondir

Exercice T24 – Diffusion de bactéries [♦♦◇]

Sujet de concours : *d'après oral TPE*

On s'intéresse à la diffusion de bactéries dans un tube. Le problème est unidimensionnel : soit $n(x,t)$ la concentration de bactéries à l'abscisse x et à l'instant t dans le tube et D le coefficient de diffusion des bactéries dans ce milieu.

1. Durant une durée T, fixée par les conditions expérimentales, le nombre de bactéries se divisant en deux par unité de volume est égal à $n(x,t)$. Déterminer le nombre $\delta N_{c,+}$ de bactéries créées durant une durée dt dans un volume élémentaire $d\tau$ élémentaire.

2. Montrer qu'au premier ordre en dt/T, le nombre $\delta N_{c,+}$ s'écrit comme

$$\delta N_{c,+} = \frac{dt}{T}\ln(2) n(x,t)\, d\tau$$

3. La probabilité qu'une bactérie meurt durant un temps T est égale à $n(x,t)/n_c$ où n_c est la concentration critique de bactéries. Déterminer le nombre $\delta N_{c,-}$ de bactéries qui meurent durent une durée dt dans un volume $d\tau$ élémentaire.

4. Montrer que $n(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{T}\left(\ln(2)n(x,t) - \frac{n(x,t)^2}{n_c}\right)$$

5. Quelles sont les solutions uniformes et stationnaires ?

Exercice T25 – Extraction de gaz naturel, loi de Darcy [♦♦◇]

On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse de volume total V comprenant un volume qV de méthane gazeux, la constante q étant la porosité de la roche. Cette roche poreuse a la forme d'un cylindre de section circulaire S et de longueur L, limité sur ses bords et sur sa section $x = L$ par une roche imperméable. La section $x = 0$ modélise le puits d'extraction du méthane et on admettra que la pression y est maintenue constante, égale à $p_0 = 1$ bar. On fait les hypothèses suivantes :

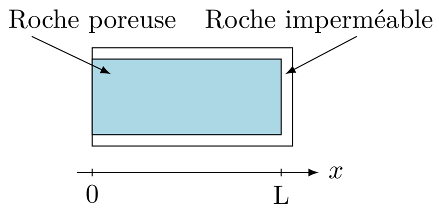

Fig. 5 – Modélisation de l'extraction de gaz naturel

- ▷ l'influence de la pesanteur est négligeable ;
- ▷ le problème est unidimensionnel, de sorte que toutes les grandeurs physiques sont uniformes dans une section du cylindre ; on note $p(x,t)$ le champ de pression du méthane ;
- ▷ la température est uniforme et vaut T = 300 K ;
- ▷ le méthane est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M = 16 g.mol^{-1} ;
- ▷ l'écoulement de méthane obéit à la loi de Darcy, *i.e.* le débit massique de méthane par unité de surface s'exprime sous la forme du vecteur densité de courant massique équivalent suivant : $\vec{\jmath} = \frac{k}{\nu}\overrightarrow{\text{grad}}\, p$ où ν est la viscosité cinématique du méthane et k la perméabilité de la roche poreuse ; ces deux grandeurs sont indépendantes de la pression.

1. Montrer que $p(x,t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

où l'on exprimera D en fonction de k, ν, et R (constante des gaz parfaits), T, M et q.

2. Quel est ce type d'équation ? Connaissez-vous d'autres situations régies par ce type d'équation ?

3. Déterminer la dimension de k. Interpréter.

4. On cherche une solution de la forme $p(x,t) = p_0 + p_1 \sin(\alpha x)\exp(-t/\tau)$ où α et τ sont des constantes positives. Exprimer α en fonction de D et τ.
5. Montrer que α ne peut prendre que des valeurs particulières que l'on exprimera.

Dans la suite, on adopte la plus petite valeur possible de α.

6. Exprimer la masse $m(t)$ de méthane contenue dans le gisement à la date t en fonction des données.
7. Sachant que $p_1 = 100 p_0$, que $\mathrm{L} = 5{,}0$ km, $\mathrm{D} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m^2.s^{-1} et $q = 0{,}15$, calculer en années la date t^* à laquelle 95% du méthane contenu dans le gisement a été récupéré ; commenter.
8. Tracer l'allure de $m(t)$; et de $p(x,t)$ en fonction de x pour $t = 1$, 10, 30 et 40 ans.

Exercice T26 – Fission nucléaire [♦♦♦]

On s'intéresse à la diffusion de neutrons dans un barreau de plutonium 239 cylindriques d'axe (Ox), de longueur L et de section S. On note $n(x,t)$ la densité particulaire des neutrons dans le barreau. Les neutrons diffusent dans le barreau avec un coefficient de diffusion $\mathrm{D} = 20$ m^2.s^{-1}.
Le plutonium 239 est un matériau fissible, les collisions entre les neutrons et les noyaux de plutonium donnent lieu à des réactions nucléaires durant lesquelles il y a production de neutrons. Le nombre de neutrons ainsi produits durant un temps dt dans un volume dτ est $\delta \mathrm{N_c} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{T}} n(x,t)\mathrm{d}\tau$, avec $\mathrm{T} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ s un temps caractéristique des réactions nucléaires dans le barreau.
En premier approximation, on suppose que la densité particulaire s'annule aux extrémités du barreau en $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$ mais ne s'annule pas à l'intérieur dans le barreau.

1. Montrer que $n(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial +^2}\frac{n(x,t)}{\mathrm{T}}$$
2. On cherche une solution de l'équation de diffusion sous la forme $n(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer que f et g vérifient
$$\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{K}$$
où K est une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question.
3. Résoudre l'équation différentielle portant sur f et en déduire l'expression de K en fonction de L, D et T.
4. Déterminer l'expression de g.
5. Montrer que la longueur du barreau L doit rester inférieure à une longueur critique $\mathrm{L_c}$ afin d'éviter la divergence de $n(x,t)$. Que se passe-t-il si $\mathrm{L} > \mathrm{L_c}$?