CORRECTION

TD EM2 - Champ électrostatique

Exercice EM21 – Lignes de champ [♦◇◇]

Soit la figure 14.1, les cartes de champ représentent le champ créé par deux charges ponctuelles notées q_1 et q_2.

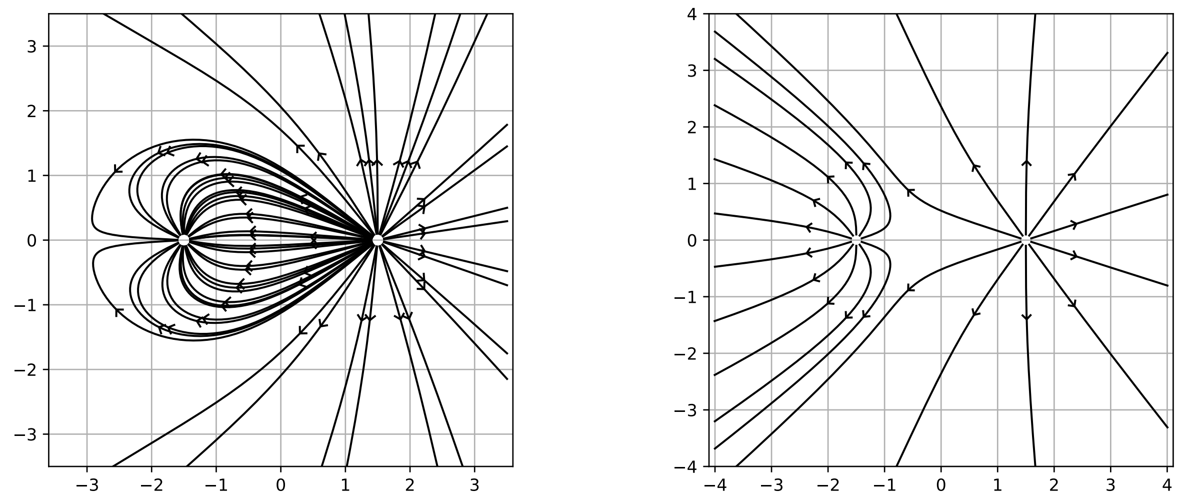


Fig. 14.1 – Lignes de champ de deux charges ponctuelles q_1 et q_2.

1. Déterminer dans chaque cas le signe des charges et le rapport q_2/q_1.
2. Tracer les équipotentielles.

Exercice EM22 – Électromètre [♦♦◇]

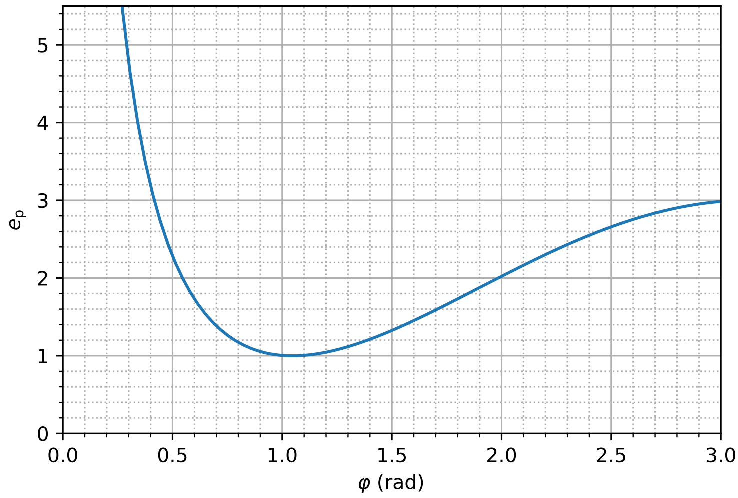
Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elle sont suspendues à un même point O par deux fils isolants de même longueur b. Une boule notée A est fixe, le point est la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est supposé uniforme.

On donne : $b = 12{,}0$ cm, $m = 2{,}55$ g, $g = 9{,}81$ m.s^{-2} et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F.m^{-1}.

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact. La charge Q se répartit de manière égale entre les deux boules. Il en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

1. Donner l'expression de l'intensité F de la force électrostatique qui s'exerce sur P. Quelle est sa direction ?
2. Déterminer l'expression de l'angle φ_e à l'équilibre.
3. Montrer que la mesure de l'angle φ_e à l'équilibre permet de mesurer la valeur de la charge Q.
4. On mesure $\varphi = 60{,}0°$. En déduire la valeur numérique de la charge Q.
5. Calculer l'énergie potentielle E_p de P.
6. Retrouver l'expression de φ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

On s'aidera de la courbe suivante, où on a tracé la fonction $e_p = \dfrac{E_p}{E_{p,ref}}$ en fonction de φ, avec $E_{p,ref} = \dfrac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 b}$:



Exercice EM23 – Étude d'une carte d'équipotentielles [♦♦♦]

La carte des équipotentielles créées par trois charges ponctuelles situées dans le plan (xOy) est donnée sur la figure 14.2.

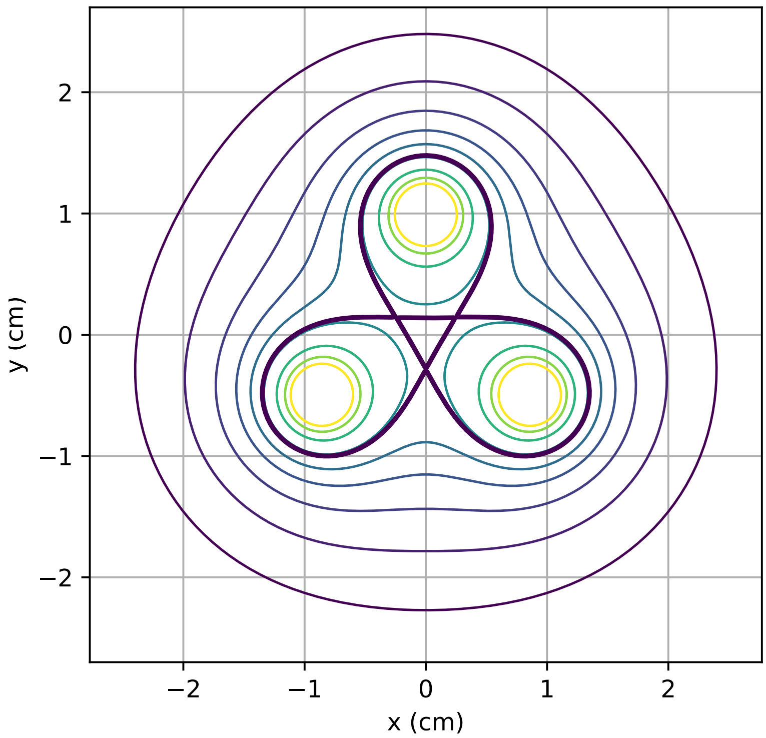


Fig. 14.2 – Équipotentielles créées par trois charges

1. Où sont situées les charges ?
2. Quelles sont les symétries et les invariances de la distribution de charges ?
3. Que représente la courbe plus épaisse ?
4. Tracer la cartes des lignes de champ correspondantes.

Les équipotentielles extérieures (celles qui entourent les trois charges) sont tracées par un potentiel variant de $12V_0$ à $25V_0$ par sauts de $3V_0$, les équipotentielles intérieures (celles qui entourent chacune des charges) pour un potentiel variant de $28V_0$ et $50V_0$ par sauts de $6V_0$, où V_0 est le potentiel créé par une seule charge au centre. À ces lignes s'ajoutent celle tracée avec une ligne plus épaisse.

5. Donner la valeur du champ électrique sur l'axe (Oy) au point de coordonnées (0,2). Une unité sur le graphique représente 1 cm et $q = 10^{-10}$ C.

6. Calculer le potentiel en un point de coordonnées (0,0,z).

7. On donne au voisinage de O le développement limité de V(x,y,z) :

$$\mathrm{V}(x,y,z) = \mathrm{V}_1 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2 + c_1 yz + c_2 xz + c_3 xy$$

Déterminer tous les coefficients en exploitant les symétries de la distribution, l'équation de Laplace vérifiée par le potentiel et la question précédente. On utilisera le fait que l'image du point M(x,y,0) par rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe (Oz) est le point M$'(-x/2 - \sqrt{3}y/2, \sqrt{3}x/2 - y/2, 0)$.

Pour approfondir

Exercice EM24 – Positions d'équilibre [♦♦◊]

Une charge Q > 0 est uniformément répartie sur un cercle de rayon a, d'axe (Oz) vertical de centre O. On note λ la densité linéique de charge associée.

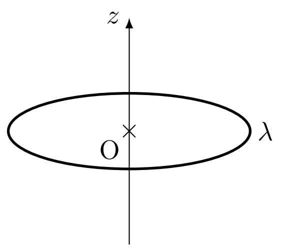


Fig. 14.3 – Cercle d'axe (Oz) uniformément chargé.

1. Montrer que le champ électrostatique est de la forme $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}_r(r,z)\overrightarrow{e_r} + \mathrm{E}_z(r,z)\overrightarrow{e_z}$. Que peut-on ajouter lorsque le point M se trouve sur l'axe (Oz) ?

2. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ en un point M de l'axe (Oz) et tracer le graphe de $\mathrm{E}_z(z)$. On donne le graphe de la fonction $f : u \mapsto u/(u^2+1)^{3/2}$.

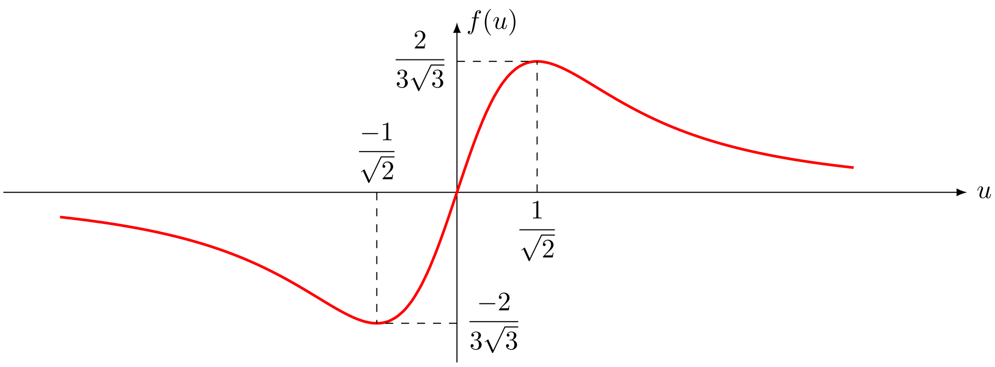


Fig. 14.4 – Graphe de la fonction $f : u \mapsto u/(u^2+1)^{3/2}$

3. Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est astreinte à se déplacer sur l'axe (Oz). Déterminer ses positions d'équilibres éventuelles. On posera

$$k = mg\frac{4\pi\varepsilon_0}{q\mathrm{Q}}a^2$$

4. La particule est écartée de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale. Déterminer la nature et les caractéristiques de son mouvement. Conclure sur la stabilité des positions d'équilibres.

Exercice EM25 – Anneau chargé [♦♦♢]

Reprenons le distribution de charges sur un cercle d'axe (Oz).

Le champ sur l'axe de l'anneau, en un point M de cote z, est de la forme $\overrightarrow{E} = E_0(z)\overrightarrow{e_z}$. L'expression de la fonction $E(z)$ est inutile pour résoudre l'exercice.

On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point P défini par des coordonnées cylindriques (r,θ,z), avec $r \ll a$ où a est le rayon de l'anneau, c'est aussi la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ $\overrightarrow{E}$.

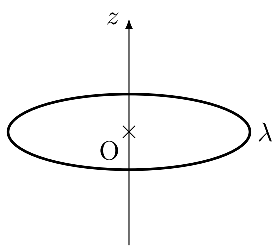


Fig. 14.5 – Cercle d'axe (Oz) uniformément chargé.

De manière générale : $\overrightarrow{E}(P) = \overrightarrow{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e_\theta}) + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$.

1. Montrer par des arguments de symétrie, qu'en P, $E_\theta(r,\theta,z) = 0$.
2. Montrer que $E_r(r,\theta,z)$ et $E_z(r,\theta,z)$ ne dépend que de r et z.
3. Montrer qu'au voisinage de l'axe, le flux du champ $\overrightarrow{E}$ est conservatif. Que peut-on dire de sa circulation le long d'un contour fermé ?
4. On choisit r et dz tels que r/a et dz/a soient des infiniment petits du premier ordre.

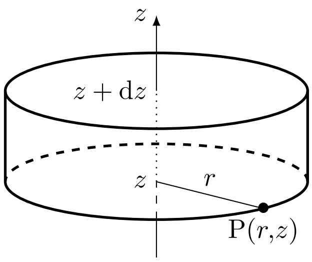
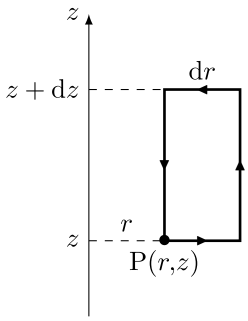


Fig. 14.6 – Cylindre élémentaire passant par P.

Calculer le flux du champ électrostatique à travers ce cylindre et en déduire l'expression de $E_r(r,z)$ en fonction de $E_0(z)$ et/ou de sa dérivée.

5. Justifier le fait que $E_z(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre 2 en r.
6. On considère le rectangle ci-dessous :



On a choisi r/a infiniment petit d'ordre 1, dr/a et dz/a infiniment petits d'ordre 2. En calculant la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de ce rectangle, montrer que

$$E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2E_0}{dz^2}(z)$$

7. Récapituler l'expression de $\overrightarrow{E}(P)$ au premier ordre en r, puis au deuxième ordre en r.